

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ АКУСТИКИ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Интерес к прямым и обратным задачам дифракции вызван активным развитием радиоэлектронной аппаратуры и техники. Особый интерес представляют задачи в резонансном диапазоне частот, когда обычные методы решения не работают. В этом случае применяют методы объемных сингулярных интегральных уравнений. Целью данной работы является изучение задачи дифракции акустической волны на плоскости, а именно нахождения приближенного решения уравнения Гельмгольца для полного поля акустической волны и разработка алгоритма восстановления волнового параметра материала.

Материалы и методы. С помощью функции Грина рассматриваемая краевая задача из дифференциальной постановки сводится к объемному сингулярному интегральному уравнению. В отличие от дифференциальной постановки задачи, где решение производится на бесконечной области, интегральное уравнение будет решаться только на фигуре.

Результаты. Представлены результаты решения прямой задачи для разных размерностей расчетных сеток и разных значений волновых чисел k . Также получены результаты восстановления волнового числа k по известному значению акустического поля.

Выводы. Представлен метод восстановления волнового параметра материала. Метод был проверен на различных частотах и для различных материалов. Результаты проверки показывают хорошую устойчивость при восстановлении акустических параметров тела.

Ключевые слова: интегральное уравнение, краевая задача, уравнение Гельмгольца, метод сопряженных градиентов, численное решение, задача дифракции.

R. O. Evstigneev, M. Yu. Medvedik

THE ITERATION METHOD FOR SOLVING DIRECT AND INVERSE TWO-DIMENSIONAL ACOUSTIC PROBLEMS

Abstract.

Background. The interest in direct and inverse diffraction problems is caused by active development of radio devices and mechanisms. Of particular interest are the problems in the resonance bandwidth, when the regular methods do not work. In this case, scientists use the methods of volume singular equations. The aim of this work is to study the diffraction problem of an acoustic wave on a plane, namely to find an approximate solution of the Helmholtz equation for the full field of an acoustic wave and to develop a reconstruction algorithm of the material's wave parameter.

Materials and methods. By using the Green's function the boundary value problem of differential formulation is reduced to a volume singular equation. As opposed

¹ Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (Госзадание, проектная часть, грант № 2, 11.02.2014К).

to the differential formulation of the problem, where the solution is found on the infinite domain, the integral equation is solved only in the figure.

Results. The authors present the solution results of the direct problem for different dimensions of computational grids and different wave numbers k , as well as the results of reconstruction of the wave number k from the known value of the acoustic field.

Conclusions. The authors suggest the method of the material's wave parameter reconstruction. The method was tested at different frequencies and for different materials. The test results show good stability of body's acoustic parameters reconstruction.

Key words: integral equation, boundary value problem, Helmholtz equation, conjugate gradient method, numerical solution, diffraction problem.

Введение

Задача определения параметров материала по серии измерений является актуальной задачей акустики и электродинамики. Данная задача находит применение при проектировании эхолотов, отражателей и других СВЧ устройств. В случае, когда задача является акустической, определяемым параметром является волновое число, характеризующее структуру материала. Для восстановления волнового числа разработан следующий итерационный процесс.

1. Постановка прямой задачи

Определение рассеянного поля в различных материалах и средах является актуальной задачей в акустике. Точные решения большинства задач дифракции могут быть получены лишь для ограниченного числа фигур правильной геометрии. Поэтому большое значение для практических приложений представляет развитие различных приближенных и численных методов, справедливых для фигур произвольной формы. Таким образом, возникает необходимость разработки новых методов решения подобных задач. Одним из перспективных методов является метод объемных сингулярных интегральных уравнений, при использовании которого краевая задача сводится к решению объемного сингулярного интегрального уравнения [1, 2]. Решение полученного интегрального уравнения в общем случае возможно лишь численными методами. Однако благодаря снижению размерности задачи за счет сведения к интегралу по поверхности численные расчеты значительно упрощаются. Решение таких задач с приемлемой для практики точностью требует очень большого объема вычислений. Представленный метод позволяет решать подобные задачи на фигурах сложной геометрической формы при использовании результатов, полученных при решении задачи на фигуре базовой формы.

Рассмотрим двумерную задачу дифракции акустической волны на фигуре Q , расположенной в свободном пространстве R^2 с волновым числом $k_0 > 0$.

Пусть дано неоднородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2(x)u = f(x), x = (x_1, x_2), \quad (1)$$

где $f(x)$ – известная функция с компактным носителем; $k^2(x)$ – непрерывная вещественная функция, $k^2(x) > 0$.

Будем предполагать, что на границе раздела двух сред выполняются условия сопряжения

$$[u]_{\partial Q} = 0, \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\partial Q} = 0, \quad (2)$$

где $[\cdot]$ – скалярная функция на ∂Q , и условия излучения Зоммерфельда

$$\frac{\partial u}{\partial |x|} = iku + O\left(\frac{1}{|x|}\right), |x| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Представим данное уравнение в виде

$$\Delta u + k_0^2(x)u = (k_0^2 - k^2(x))u + f(x), \quad (4)$$

где $k(x)$ – функция, характеризующая тело Q . Обозначим через $F(x) = (k_0^2 - k^2(x))u + f(x)$ правую часть уравнения (4). Тогда, используя вторую формулу Грина, получим

$$\begin{aligned} & \int_S (\Delta + k_0^2)u(x)G(x, y) - (\Delta + k_0^2)G(x, y)u(x)dx = \\ & = \int_{\partial S} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial n} G(x, y) - \frac{\partial G(x, y)}{\partial n} u(x) \right) dl, r := |x - y|, \end{aligned}$$

где S – окружность, $G(x, y) = H_0^{(1)}(kr)$ [3], $S := \{x : |x| < R\}$, для некоторого $R > 0$.

Учитывая, что $F(x) = (\Delta + k_0^2)u$, а $(\Delta + k_0^2)G(x, y) = \delta(x, y)$, приходим к следующей формуле:

$$u(y) = \int_S F(x)G(x, y)dx - \int_{\partial S} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial n} G(x, y) - \frac{\partial G(x, y)}{\partial n} u(x) \right) dl.$$

Будем предполагать, что на границе раздела двух сред выполняются условия сопряжения

Интеграл по ∂S в правой части уравнения стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Задача сведена к следующему уравнению:

$$u(y) = \int_S F(x)G(x, y)dx.$$

Учитывая, что $F(x) = (k_0^2 - k^2(y))u + f(x)$, получаем

$$u(x) = \int_Q G(x, y)(k_0^2 - k^2(y))u(y)dy + f^0(x),$$

где

$$f_0(x) := \int_{R^2} f(y) G(x, y) dy.$$

Функция $f_0(x)$ характеризует падающее поле. В результате приходим к уравнению, известному в литературе как интегральное уравнение Липпмана – Швингера:

$$u(x) = f^0(x) + \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y)) u(y) dy. \quad (5)$$

Будем рассматривать уравнение (5) в пространстве $L_2(Q)$. Это уравнение играет важную роль не только в акустических задачах дифракции, но и в электродинамике, квантовой механике и во многих других областях физики.

Для однородного тела, т.е. такого, для которого $k(x) = \text{const}$, уравнение (5) модифицируется и принимает вид

$$u(x) = f^0(x) + k_1^2 \int_Q G(x, y) u(y) dy. \quad (6)$$

Обозначим $Au := \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y)) u(y) dy, u := u(x), F := f^0(x)$ и

запишем уравнение в операторном виде: $Lu := u - Au := g$.

Теорема 1 [4]. Оператор $Lu := u - Au : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ фредгольмов.

Доказательство. Запишем уравнение (5) в операторном виде: $L := I - A$. Оператор A компактный, так как он является оператором со слабо сингулярным ядром, I – единичный оператор. Таким образом, оператор $L := I - A$ является оператором Фредгольма.

Лемма 1 [4]. Решение задачи (1)–(3) единственно.

Теорема 2 [4]. Оператор $L := I - A : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ является непрерывно обратимым.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что оператор $L := I - A$ инъективен. Тогда из утверждения 1 получаем, что $L := I - A$ является непрерывно обратимым.

2. Метод Галеркина

Рассмотрим уравнение

$$A\varphi = g. \quad (7)$$

Пусть последовательности подпространств $X_n \subset L_2(Q)$ такие, что $\dim X_n = n$.

Будем решать (7) методом Галеркина [5]:

$$(A\varphi_n, g) = (f, g) \quad (8)$$

для любого $g \in X_n$.

В общем случае можно ожидать сходимость метода только тогда, когда подпространства X_n предельно плотны в $L_2(Q)$:

$$\inf_{y \in X_n} \|y - v\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (9)$$

для любого $f \in X$. Свойство (9) называют также *свойством аппроксимации* [5] (произвольный элемент из $L_2(Q)$ может быть аппроксимирован элементами из подпространства X_n с любой точностью в норме $L_2(Q)$).

3. Обратная задача восстановления волнового числа рассеивателя

Пусть фигура Q имеет прямоугольную форму. Построим на Q равномерную прямоугольную сетку (рис. 1):

$$\Pi_{i,j} = \{x_i \in [a,b], y_j \in [a,b]\}; i, j = 1, \dots, n.$$

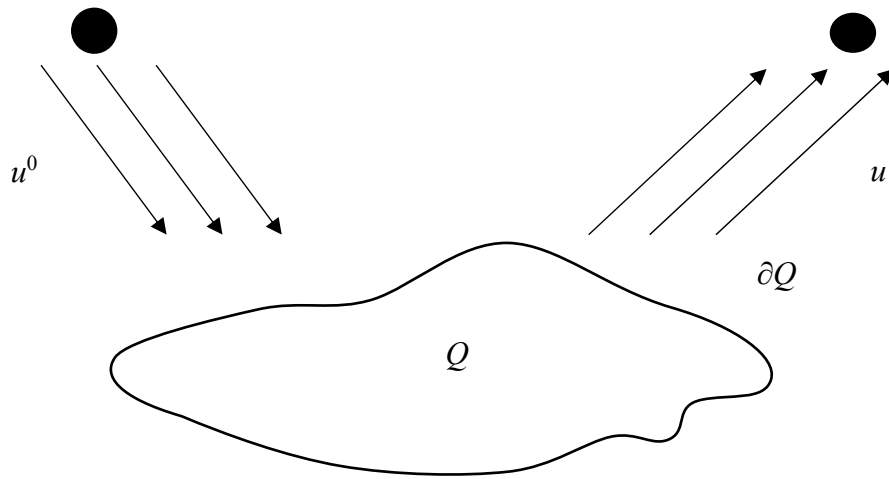


Рис. 1

Итерационный процесс для решения обратной задачи при $n \geq 1$ имеет следующий вид:

$$\frac{1}{k_n^2} v_n(x) = f^0(x) + \int_Q G(x, y) v_n(y) dy; \quad (10)$$

$$u_n = \frac{v_n}{k_{n-1}^2}; \quad (11)$$

$$k_n^2 = \frac{u^{scat}(x_1, C) - f^0(x_1)}{A u_{n-1}}. \quad (12)$$

На первом шаге выберем начальное приближение $k_1 \neq k_0$ и u_1 . Используя формулу (10), определяем значение v_1 . Далее, используя формулы (11) и

(12), находим уточнение решения u_2 и значение k_2 . Продолжаем итерационный процесс до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность для k_n (волнового числа). При каждом итерационном процессе проверяется выполнение неравенства $|k_n - k_{n-1}| < \varepsilon$, где ε – заданная точность при нахождении значения коэффициента k .

3. Численные результаты

Ниже приведены результаты решения прямой задачи для разных размерностей расчетных сеток разбиения, разных значений волновых чисел k (рис. 2, 3). Также приведены результаты восстановления волнового числа k по известному значению акустического поля (рис. 3). Для расчетов использовался компьютер Asus x55A.

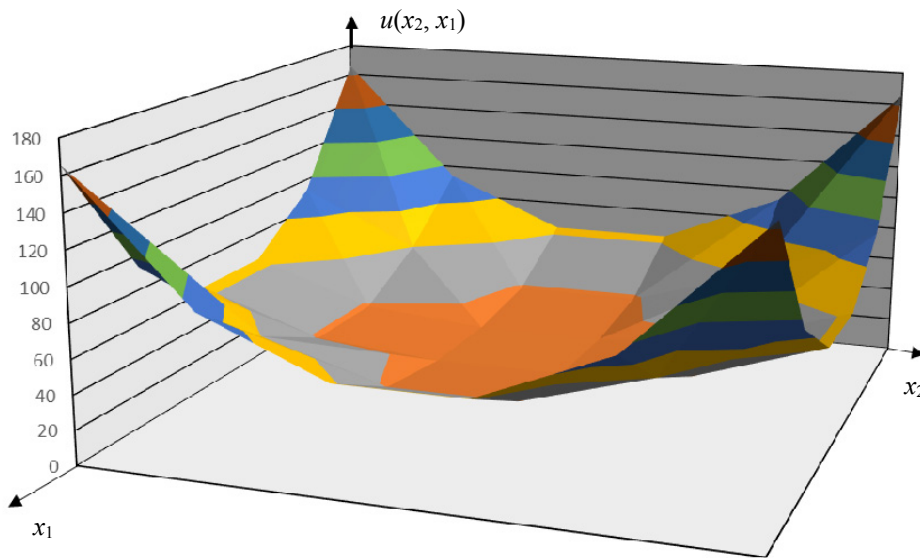


Рис. 2. Значения модуля решения интегрального уравнения u (прямая задача)

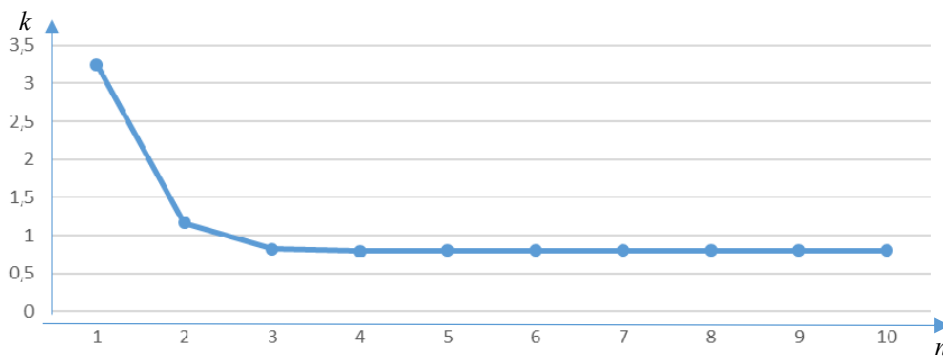


Рис. 3. График сходимости k (обратная задача)

На рис. 3 показана зависимость сходимости $k = 0,8$ при размерности сетки $n = 6$, $a = 0,0$, $b = 1,0$.

На рис. 4 представлено решение прямой задачи при значении волнового числа $k = 1,05$, размерности расчетной сетки $n = 8$, $a = 1,5$, $b = 3,0$.

На рис. 5 показана зависимость сходимости $k = 1,05$ при размерности сетки $n = 8$, $a = 1,5$, $b = 3,0$.

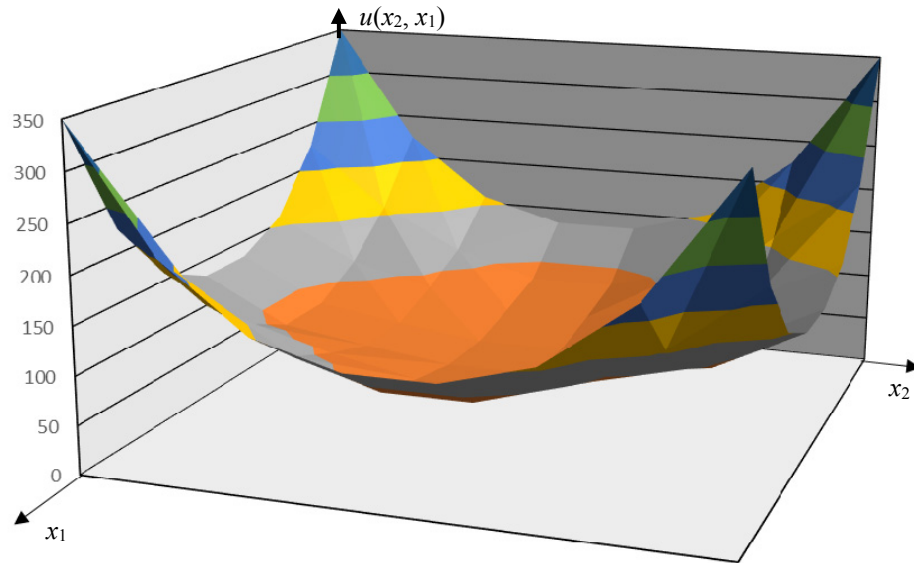


Рис. 4. Значения модуля решения интегрального уравнения u (прямая задача)

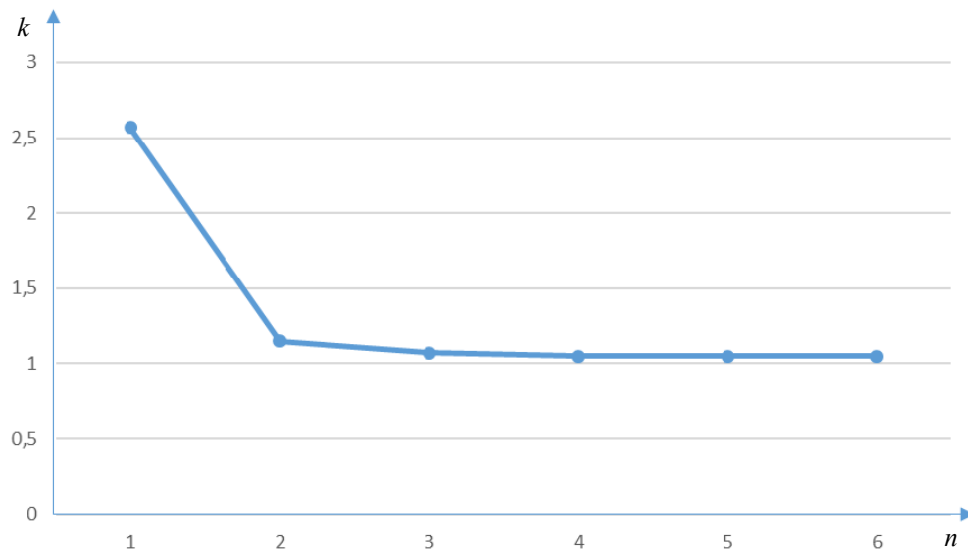


Рис. 5. График сходимости k (обратная задача)

Был разработан комплекс программ, позволяющих решать прямые и обратные задачи акустики. Результаты тестирования комплекса показали хорошую точность решения задач. Имеет место внутренняя сходимость методов. Комплекс программ написан на языке программирования C\C++. Задачи восстановления диэлектрических свойств материала рассмотрены в работах [6–9].

Список литературы

1. **Ильинский, А. С.** Математические модели электродинамики : учеб. пособие для вузов / А. С. Ильинский, В. В. Кравцов, А. Г. Свешников. – М. : Высшая школа, 1991. – 224 с.
2. **Колтон, Д.** Методы интегральных уравнений в теории рассеяния : перевод с англ. / Д. Колтон, Р. Кресс. – М. : Мир, 1987. – 312 с.
3. **Ватсон, Г. Н.** Теория бесселевых функций. Ч. 1 / Ватсон Г. Н. ; перевод с англ. В. С. Бермана. – М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1949. – 799 с.
4. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический метод решения интегрального уравнения Липмана – Швингера на фигурах сложной формы / М. Ю. Медведик // Радиотехника и Электроника. – Пенза, 2012. – Т. 57. – С. 1–6.
5. **Kress, R.** Linear Integral Equations. Applied Mathematical Sciences / R. Kress. – Vol. 82. – New-York : Springer-Verlag. Inc., 1989.
6. **Гришина, Е. Е.** Численный метод решения обратной задачи восстановления эффективной диэлектрической проницаемости по коэффициенту отражения / Е. Е. Гришина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 75–84.
7. **Гурина, Е. Е.** Численное и аналитическое решение задачи дифракции электромагнитного поля на двух секциях с разной диэлектрической проницаемостью, расположенных в прямоугольном волноводе / Е. Е. Гурина, Е. Д. Деревянчук, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 4 (16). – С. 73–81.
8. **Гурина, Е. Е.** Численное и аналитическое решение задачи дифракции электромагнитного поля на диэлектрическом параллелепипеде, расположенном в прямоугольном волноводе / Е. Е. Гурина, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 2 (14). – С. 44–53.
9. **Медведик, М. Ю.** Восстановление диэлектрической проницаемости неоднородного тела, помещенного в прямоугольный волновод по коэффициенту прохождения и отражения / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 1 (25). – С. 5–18.

References

1. Il'inskiy A. S., Kravtsov V. V., Svешnikov A. G. *Matematicheskie modeli elektrodinamiki: ucheb. posobie dlya vuzov* [Mathematical models of electrodynamics: tutorial for universities]. Moscow: Vysshaya shkola, 1991, 224 p.
2. Kolton D., Kress R. *Metody integral'nykh uravneniy v teorii rasseyaniya: perevod s angl.* [methods of integral equations in the scattering theory: translation from English]. Moscow: Mir, 1987, 312 p.
3. Watson G. N. *Teoriya besselevykh funktsiy. Ch. 1. Perevod s angl. V. S. Bermana* [Theory of besselian functions. Part 1. Translation from English by V.S. Berman]. Moscow: Izd-vo inostr. lit-ry, 1949, 799 p.
4. Medvedik M. Yu. *Radiotekhnika i Elektronika* [Radio engineering and Electronics]. Penza, 2012, vol. 57, pp. 1–6.
5. Kress R. *Linear Integral Equations. Applied Mathematical Sciences*. Issue 82. New-York: Springer-Verlag. Inc., 1989.
6. Grishina E. E. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2012, no. 2 (22), pp. 75–84.
7. Gurina E. E., Derevyanchuk E. D., Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [Univer-

- sity proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2010, no. 4 (16), pp. 73–81.
8. Gurina E. E., Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2010, no. 2 (14), pp. 44–53.
9. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2013, no. 1 (25), pp. 5–18.
-

Евстигнеев Роман Олегович

студент, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Evstigneev Roman Olegovich

Student, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Медведик Михаил Юрьевич

кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: _medv@mail.ru

Medvedik Mikhail Yur'evich

Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 517.3 517.9

Евстигнеев, Р. О.

Итерационный метод решения прямых и обратных двумерных задач акустики / Р. О. Евстигнеев, М. Ю. Медведик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 4 (32). – С. 28–36.